



TITLE:

F-regular and F-rational graded rings

AUTHOR(S):

渡辺, 敬一

CITATION:

渡辺, 敬一. F-regular and F-rational graded rings. 数理解析研究所講究録
1990, 713: 95-107

ISSUE DATE:

1990-02

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/101714>

RIGHT:

F-regular and F-rational graded rings

東海大・理 (情報数理) 渡辺敬一

(Kei-ichi Watanabe)

標数 $p > 0$ の環の Frobenius 写像によつてイデアルの tight closure の概念が Hochster と Huneke によつて定義され、この概念を用いて標数 0 の rational singularity に対応する F-regular, F-rational ring の概念が定義される。本稿の目的は、

(1) Cohen-Macaulay graded ring に対しては、パラメータイデアルの tight closure は、grading によつてかなり説明がつくこと。特に F-rational ring は [GW] で定義された $a(R)$ によつて説明されること。

(2) normal graded ring を $R = R(X, D)$ と $X = \text{Proj}(R)$ と $D \in \text{Div}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ で表したときに R が F-regular (又は F-pure) であるための (X, D) の条件の二点を中心にして書いて行きたい。

なお、この稿は expository なものである事をあつておきたい。

§ 1. 用語の準備.

R が標数 $p > 0$ の体を含むとき, Frobenius 写像

$$F: R \rightarrow R = {}^F R, \quad F(a) = a^p$$

を考える. 以下に於て, $q = p^e$ は必ず p の中とする.

$$F^e: R \rightarrow R = {}^e R \quad (\text{右辺を } {}^e R \text{ と書いて区別する}).$$

R が reduced のとき F は injective だから, F^e と

$$R \hookrightarrow R^{1/q}$$

を同一視できる. また, $R^0 := R - \bigcup \{\text{min. prime of } R\}$ とおく.

(1.1) Γ -イデール $I \subset R$ に於て, $x \in I^*$ (tight closure of I) $\Leftrightarrow \exists c \in R^0, \forall q \gg 0, c \cdot x^q \in I^{[q]}$

$$\Leftrightarrow \quad \text{ " " " " }, \quad c^{1/q} \cdot x \in I \cdot R^{1/q}$$

但し, $I = (a_1, \dots, a_n)$ のとき, $I^{[q]} = (a_1^q, \dots, a_n^q)$.

また, R -module M と submodule $N \subset M$ に於て,

$$x \in N^* \Leftrightarrow \exists c \in R^0, \forall q \gg 0 \quad (\forall e \gg 0), c \cdot F^e(x) \in \text{Im}(N \otimes_R {}^e R)$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{ " " " " }, \quad x \otimes c^{1/q} \in \text{Im}(N \otimes_R R^{1/q})$$

但し, $F^e(x) := x \otimes 1 \in F^e(M) := M \otimes_R {}^e R, \quad x^q := F^e(x),$

$\text{Im}(N \otimes_R {}^e R \rightarrow M \otimes_R {}^e R) =: N^{[q]}$ とおくと, 上の条件は,

$c \cdot x^q \in N^{[q]}$ と Γ -イデールの場合と対応する.

$$x \in I^* \Leftrightarrow R/I \text{ に於て, } x \bmod I \in (0)^*.$$

(R, m) が local ring のとき, $M = E := E_R(R/m)$ の場合
と, $M = H_m^d(R)$ ($d = \dim R$) の場合が以下に於て特に重要
である.

(1.2) 定義. (i) R が weakly^(*) F-regular $\Leftrightarrow \forall I \subset R, I^* = I$.

(2) (R, m) が F-rational $\Leftrightarrow \forall$ parameter ideal $I = (x_1, \dots, x_d)$,
 $I = I^*$.

(*) "weakly" は以下常に省略する事にする.)

[HH] §4, 5 の R が F-regular $\Rightarrow R$ は normal,
Cohen-Macaulay の証明は "F-regular" と "F-rational"
におきかえて成立する事は容易にわかる.

以下 " R が Cohen-Macaulay" は仮定しよう.

(1.3) (R, m) が Cohen-Macaulay, $\dim R = d$ のとき,
 $I = (x_1, \dots, x_d)$ を R の parameter ideal とすると,

$$H_m^d(R) = \varinjlim_{q'} R/I^{[q']} = \bigcup_{q'} R/I^{[q']} \quad \text{である.}$$

但し, $q' > q$ に対し,

$$R/I^{[q]} \longrightarrow R/I^{[q']} \quad \text{は} \quad y \bmod I^{[q]} \longmapsto (x_1 \cdots x_d)^{q'-q} \cdot y \bmod I^{[q']}$$

で同一視される. このとき,

$$(0)_{R/I^{[q]}}^* = (0)_{H_m^d(R)}^* \cap R/I^{[q]}$$

は容易にわかる. 特に, 上記の $R/I^{[q]} \longrightarrow R/I^{[q']}$ は,

$$(0:m)_{R/I^{[q]}} \cong (0:m)_{R/I^{[q']}} \quad \text{と} \quad \nu \text{ を} \text{ 起すから,}$$

$$R \text{ が F-rational} \Leftrightarrow (0)^* = (0) \text{ in } H_m^d(R) \Leftrightarrow \exists I = (x_1, \dots, x_d),$$

$I^* = I$. ([F1], [FW] 参照).

(1.4) $c \in R$ が test element $\Leftrightarrow \forall I \subset R, \forall x \in I^*,$
 $c \cdot x^q \in I^{[q]}$ ($q \gg 0$).

つまり, test element とはすべての ideal の tight closure の test を一斉に引き受けると言う訳である. ([HH, §6] 参照).

test element で生成される ideal を test ideal と云う.

test ideal は次の意味で, "non-F-regular locus を定義するイデアル" と云う.

(1.5) $F: R \rightarrow R$ が finite, R が reduced のとき,
 R が strongly F-regular $\Leftrightarrow \begin{cases} \forall c \in R^0, \exists q, R \rightarrow R^{1/q}, \\ 1 \mapsto c^{1/q} \text{ が } R\text{-mod. と split.} \end{cases}$

上の状態のとき, $c^{1/q} \cdot I \cdot R^{1/q} \cap R = I$ であるから, 任意の $c \in R^0$ が test element である. また, R が Gorenstein のとき,

R が F-rational $\Leftrightarrow R$ が F-regular $\Leftrightarrow R$ が strongly F-regular が成立する. "strongly F-regular" という性質は open property や localization で保たれるなど, ある意味では F-regular より現在の所扱っている性質である, ([HH2] 参照).

次の結果は test element に関して重要と思う.

(1.6) [HH2] $c \in R^0$, R_c が strongly F-regular ならば, c の因子中が test element である.

これの系として, (regular \Rightarrow strongly F-regular である),

(1.7) (R, m) は (1.5) の大前提をみたし, $0 \neq x \in R$, R_x が strongly F-regular ならば (特に $\text{Spec}(R) - \{m\}$ が regular ならば), R の test ideal は m -primary である.

§2. grading と tight closure.

$R = \bigoplus_{n \geq 0} R_n$ が Cohen-Macaulay graded ring とする.

また, $R_0 = k$ は体とし, $m = R_+ = \bigoplus_{n > 0} R_n$ とおく.

$H_m^d(R)$ ($d = \dim R$) の中で $(0)^*$ を求めたい. (1.3)

により, これは homogeneous parameter ideal $I = (x_1, \dots, x_d)$ に対し, I^* を求める事に対応する.

$x_i \in R_{n_i}$ のとき, $N = \sum_{i=1}^d n_i$ とおくと, graded module としては,

$$H_m^d(R) = \varinjlim (R/I^{[q]})_{(q)}(qN)$$

であり, Frobenius 写像 $F^e: (R/I^{[q]})_{(qN)} \rightarrow (R/I^{[q^e]})_{(q^e N)}$

($q = p^e$) は $y \bmod I^{[q]} \rightarrow y^q \bmod I^{[q^e]}$ で与えられる.

$y \in R_n$ のとき, $y \bmod I^{[q]}$ の $H_m^d(R)$ での像の degree は $n - q/N$, $y^q \bmod I^{[q^e]} \in (H_m^d(R))_{q(n - q/N)}$ となる.

$H_m^d(R)$ は Artinian R -module であるから, $[H_m^d(R)]_n = 0$ ($n \gg 0$)

であり, 従って, $\eta \in [H_m^d(R)]_n$ をとるとき,

$$n > 0 \Rightarrow F^e(\eta) = 0 \quad (e \gg 0),$$

$n=0$ のとき, $\forall x \in R_m, m > a(R) = \max\{n \mid (H_m^d(R))_n \neq 0\}$,
 $x \cdot F^e(\eta) = 0 \quad (\forall e \geq 0)$.

従って,

$$(0)_{H_m^d(R)}^* \supset \bigoplus_{n \geq 0} [H_m^d(R)]_n \quad (2.1)$$

は自明に成立する. 問題は $n < 0$ のときである.

定義 ([F1]). (R, m) が F-injective $\Leftrightarrow \forall i \geq 0, F: H_m^i(R) \rightarrow H_m^i(R)$
 が injective.

しばらく Frobenius 写像とつき合っていると, 固有の標数 $p > 0$ では, この概念が本質的で最も難しいと思えてくるが, R が graded ring のとき, 上記の理由から,

$$R \text{ が F-injective} \Rightarrow a(R) \leq 0$$

である. しかし, $(0)^* \subset H_m^d(R)$ を 確定する という観点からは, 次の概念が有効と思われる.

定義 (2.2). R が F-injective in negative degree

$$\Leftrightarrow \forall \eta \neq 0 \in [H_m^d(R)]_n, n < 0, F(\eta) \neq 0.$$

この概念を用いると, test ideal が m -primary のとき, $(0)^* \subset H_m^d(R)$ を確定できる.

(2.3) R が F-injective in negative degree, かつ test ideal が m -primary $\Rightarrow (0)_{H_m^d(R)}^* = \bigoplus_{n \geq 0} [H_m^d(R)]_n$.

(証明) test ideal が m -primary より, $\exists n_0, \forall n \geq n_0$,

$\forall x \in R_n$ は test element. 一方, $H_m^d(R)$ の socle $([0:m]_{H_m^d(R)})$

は有限生成だから, $\exists n_1, [0:m]_{H_m^d(R)} \subset \bigoplus_{n \geq n_1} (H_m^d(R))_n$.

任意の $\eta \neq 0 \in H_m^d(R)$ に対して, $\exists x \in R, x\eta \in [0:m]$. また,

$\eta \neq 0 \in H_m^d(R)_n, n < 0$ とする. $q \gg 0$ と $qn + n_0 \ll n_1$ にとると, $\exists 0 \neq x \in R_m, m \geq n_0, x \cdot F^e(\eta) \in [0:m], x \cdot F^e(\eta) \neq 0$.

一方, x は test element だから, $\eta \notin (0)^*_{H_m^d(R)}$.

(2.3) τ "test ideal が m -primary" は本質的に同値である.

例 (2.4). $R = \mathbb{K}[X, Y, Z, T]/(X^3 + Y^3 + Z^3)$ とおく.

($X, Y, Z, T \in R_1$ とする.) このとき, R が F -injective $\Leftrightarrow p \equiv 1$

(mod 3) である. $I = (Y, Z, T)$ とおく, $\eta = X^2 \bmod I$ とお

くと, $\eta \in (R/I)(3)$ の degree は -1 . $\underbrace{p \equiv 1 \pmod{3} \text{ のとき}}_{\forall e, F^e(\eta) \neq 0 \text{ となる}},$

$(X, Y, Z) \cdot F^e(\eta) = 0 \quad (\forall e \geq 0), \eta \in (0)^*_{H_m^d(R)}$. このとき,

$R/I^{[p]} \cong \mathbb{K}[X, Y, Z, T]/(X^3 + Y^3 + Z^3, Y^p, Z^p, T^p)$ の socle の生成

元は $X^2(YZT)^{p-1}$ だから, $0 \neq T^{p-1} \cdot F^e(\eta) \in [0:m]$.

ある特定の p に対して, R が F -injective in negative degree かどうかを判定するのは結構面倒な作業のようである.

例 (2.5). (i) $R = \mathbb{K}[X, Y, Z]/(X^2 + Y^3 + Z^7)$ ($X \in R_{21}, Y \in R_{14}, Z \in R_6$).

このとき $\alpha(R) = 42 - (21 + 14 + 6) = 1 > 0$ だから R は F -inj.

ではない. 一方, R が F -injective in negative degree $\Leftrightarrow p \geq 7$.

(ii) $R = \mathbb{K}[X, Y, Z]/(X^3 + Y^5 + Z^7)$ のとき, R が F -injective

in negative degree $\Leftrightarrow p \geq 23$ または $p = 11, 17$.

このように, "F-injective in negative degree" はかなり面倒な性質だが, 上の例のように「標数0」で定義された「良い」(例えば, isolated singularity) ring に対しては $p \gg 0$ で常に成立する事が予想される. 実際に証明されているのは, 2次元の場合のみだが.

定理 (2.6) (R. Fedder) R が標数0の体上定義された 2次元 normal graded ring とする. このとき, $p \gg 0$ に対し, R の標数 p の reduction は F-injective in negative degree.

従って, 特に R が rational singularity ($a(R) < 0$ と同値) のとき, $p \gg 0$ に対して, R の標数 p の reduction は F-rational.

証明は R の derivation module $\text{Der}_R(R)$ を使って述べる事ができる. 実際は, どの位大きな p に対して, F-inj. in neg. deg. かも $\text{Der}_R(R)$ の言葉で与える事ができる.

高次元の場合, 更には graded でない一般の場合に対し, "R が rational singularity $\Leftrightarrow p \gg 0$ に対して, R の標数 p の reduction が F-rational" と期待されるが, 2次元ですら一般には open であるように思われる.

R が graded complete intersection の場合は, [F2] に取かわられている.

§ 3. normal graded rings の F-regularity の判定.

R が Gorenstein のとき, F -rational $\Leftrightarrow F$ -regular だが, そうでない時には F -regular と F -rational とは大部分相異なる.

— ①. $R = \bigoplus_{n \geq 0} R_n$ が normal graded ring, $R_0 = k$ が体のとき, R は $X = \text{Proj}(R)$ と $\exists D \in \text{Div}(X, \mathbb{Q}) := \text{Div}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ を用いて,

$R = \bigoplus_{n \geq 0} H^0(X, \mathcal{O}_X(nD)). T^n$ (右辺を $R(X, D)$ と表す.) と書ける $([D], [w1])$. $D = \sum_V \frac{p_V}{q_V} \cdot V$ ($q_V, p_V \in \mathbb{Z}$, q_V と p_V は互いに素, $q_V > 0$) のとき, " D の分数部分" E ,

$$D' = \sum_V \frac{q_V - 1}{q_V} \cdot V$$

で表す. このとき, $d = \dim R$ とおいて,

$$E := E_R(R/m) \cong H_m^d(K_R) \cong \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} H^{d-1}(X, \mathcal{O}_X((K_X + D') + nD)). T^n$$

であることから, $0 \neq \xi \in H^{d-1}(X, \mathcal{O}_X(K_X + D')) = H^{d-1}(X, \mathcal{O}_X(K_X)) \cong k$ をとると,

$$R = R(X, D) \text{ が } F\text{-regular} \Leftrightarrow \bigcap_{e \geq 0} \text{Ann}_R(F^e(\xi)) = (0)$$

$$\Leftrightarrow 0 \neq \forall f \in H^0(X, \mathcal{O}_X(nD)), \exists e, f \cdot F^e(\xi) \neq 0.$$

([w2] 参照) が言えるが, 更に, 次の成立する.

定理 (3.1). $R = R(X, D)$ のとき, R が F -regular と否かは, X (又は K_X) と D の小数部分 D' のみにより, 個々の D によ

らない。

即ち, $D_1, D_2 \in \text{Div}(X, \mathbb{Q})$ のとき, $(\exists N, ND_1, ND_2$ が ample Cartier divisor という条件は必要だが) $(D_1)' = (D_2)'$ ならば, $R(X, D_1)$ が F-regular $\Leftrightarrow R(X, D_2)$ が F-regular.

D' は D に integral divisor を加えても, 分母を変えずに分子をとりかえても変わらないので (この実は "F-rational" は非常にデリケートである。) F-regular ring の特徴づけに大変有効と思われる。

(証明) $F^e(\xi) \in H^{d-1}(X, \mathcal{O}_X(q(K_X + D')))$ である。今 $R(X, D_1)$ が F-regular, $(D_1)' = (D_2)'$ とし, $R(X, D_2)$ も F-regular を示そう。

1°. $R(X, D_1)$ が F-pure $\Leftrightarrow R(X, D_2)$ が F-pure

($\Leftrightarrow F(\xi) \neq 0$), F-regular \Rightarrow F-pure なるから, $R(X, D_i)$ ($i=1, 2$) は F-pure として置く。従って, F の $E_R(R/\mathfrak{m})$ への作用は injective として置く, ($R = R(X, D_i)$, $i=1, 2$)。

2°. F が injective より, $x \cdot F^e(\xi) \neq 0 \Rightarrow x \cdot F^{e+1}(\xi) \neq 0$ で, $\text{Ann}_R(F^e(\xi)) \supset \text{Ann}_R(F^{e+1}(\xi))$ である。 $\bigcap_{e \geq 0} \text{Ann}_R(F^e(\xi)) = (0)$

\Leftrightarrow ある degree_\wedge^N を fix するとき, $\exists e$,

$$\cdot F^e(\xi) : H^0(X, \mathcal{O}_X(ND_2)) \longrightarrow H^{d-1}(X, \mathcal{O}_X(ND_2 + q(K_X + D')))$$

が injective. ($R = R(X, D_2)$)。

3°. ND_1 は ample Cartier div. ($\exists N$) より, ND_2 に一致し,

$$\exists N', \quad H^0(X, \mathcal{O}_X(N'D_1 - ND_2)) \neq 0.$$

$$4^\circ. \quad 0 \neq \varphi \in H^0(X, \mathcal{O}_X(N'D_1 - ND_2)) \quad \text{をとり. } e \gg 0 \text{ を,}$$

$$\cdot F^e(\xi) : H^0(X, \mathcal{O}_X(N'D_1)) \longrightarrow H^{d-1}(X, \mathcal{O}_X(N'D_1 + q(K_X + D)))$$

が injective になるようにとると, 次の可換図式

$$\begin{array}{ccc} H^0(X, \mathcal{O}_X(ND_2)) & \xrightarrow[\text{(injective)}]{\cdot \varphi} & H^0(X, \mathcal{O}_X(N'D_1)) \\ \downarrow \cdot F^e(\xi) & & \downarrow \cdot F^e(\xi) \\ H^{d-1}(X, \mathcal{O}_X(ND_2 + q(K_X + D))) & \xrightarrow{\cdot \varphi} & H^{d-1}(X, \mathcal{O}_X(N'D_1 + q(K_X + D))) \end{array}$$

より左の2つの写像が injective である事がわかる。ゆえに,

$R(X, D_2)$ も F -regular である事がわか, t_2 .

§4. いくつかのコメント.

• F -rational と F -regular とは R が Gorenstein のとき同値で, $\dim R = 2$ のとき, R が F -rational なら divisor class group の中で, R の canonical class $cl(K_R)$ が有限位数をもつので, R は有限な canonical cover をもつ。さういふと, $R \hookrightarrow S$, S は Gorenstein, R は S の (R -module としての) 直和因子となる。このとき, " R が F -regular" は R の性質というよりむしろ S の性質と思われる。($cl(K_R)$ の位数が p と互いに素なとき, R が F -regular $\Leftrightarrow S$ が F -regular. [W2]参照).

$\dim R \geq 3$ のときは, R が F -regular であって $\dim \kappa_R$ は無限位数を持ち得る。だが, このとき "canonical cover" がとれないだろうか? 候補としては, $\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} K_R^{(i)}$ が考えられるが, この環は Noether 環になるだろうか? こういう問題は代数幾何の極小モデルの理論と関, 来そうである。(代数幾何の局所理論は可換環論というのは全く当り前の事だが。)

・ $R = \bigoplus_{n \geq 0} R_n$ が normal (Noetherian) graded ring, $\dim R = d$, $R_0 = k$ は標数 0 の体のとき, $\dim \operatorname{Spec}(R) - \{m\}$ が rational singularity なら, $[H_m^i(R)]_n = 0$ ($i < d$, $n < 0$) が成立する (但し, Grauert-Riemenschneider van. Thm. を使う.)。標数 $p > 0$ での vanishing Thm. の反例がある以上, 標数 $p > 0$ で一般には不成立だが, どのような条件をつければ成立するだろうか? (上記の命題は小平 van. Thm. の環論的 statement と云えるのだが)。

REFERENCES

- [D] M. Demazure, Anneaux gradues normaux, Introduction a la theorie des singularites, vol. II, 35-86 (ed. Le Dung Trang), Hermann, Paris, 1988.

- [F1] R. Fedder, F-purity and rational singularities, Trans. A.M.S. 278 (1983), 461-480.
- [F2] R. Fedder, F-purity and rational singularity in graded complete intersection rings, Trans. A.M.S. 301 (1987), 47-62.
- [FW] R. Fedder and K.-i. Watanabe, A characterization of F-regularity in terms of F-purity, "Commutative Algebra", Proc. Microprogram Berkeley, 1987, 227-245, Springer, 1989.
- [GW] S. Goto and K.-i. Watanabe, On graded rings, I, J. Math. Soc. Japan, 30 (1978), 179-213.
- [HH] M. Hochster and C. Huneke, Tight Closure, Invariant Theory, and the Briançon-Skoda Theorem, I, to appear in J. Amer. Math. Soc.
- [HH2] M. Hochster and C. Huneke, Tight closure and strong F-regularity, to appear in Mem. Soc. Math. France.
- [W1] K.-i. Watanabe, Some remarks concerning Demazure's construction of normal graded rings, Nagoya Math. J. 83 (1981), 203-211.
- [W2] 渡辺敬一, Frobenius 写像の作用について (第10回可換環論 symposium, 報告集).